Chương 3: Dịch chuyển điện - Luật Gauss - Dive

I. Dịch chuyển điện.

II. Luật Gauss.

III. Dive.

IV. Phương trình Maxwell 1 trong trường tĩnh.

V. Toán tử vector ∇ và định lý Dive.

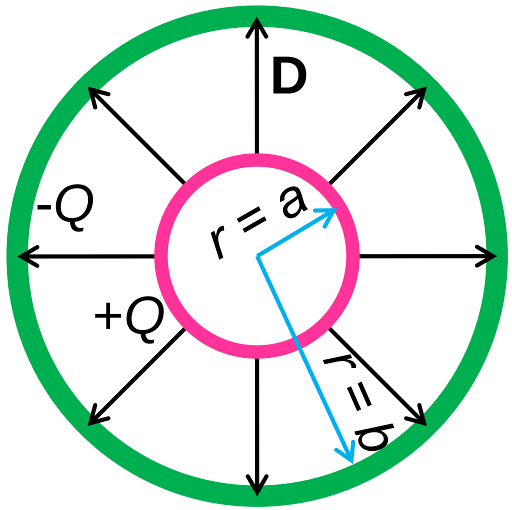
I. Dịch chuyển điện

- **Thí nghiệm của M. Faraday (1837):**
  - Hai mặt cầu kim loại đặt đồng tâm, mặt cầu ngoài gồm 2 nửa bán cầu có thể gắn chặt với nhau.
  - Lấp đầy khoảng không gian (2cm) giữa 2 mặt cầu bằng dung dịch điện môi.
  - Gỡ bỏ mặt cầu ngoài, nạp lượng +*Q* cho mặt cầu trong.
  - Lắp mặt cầu ngoài và đổ đầy chất điện môi giữa 2 mặt cầu.
  - Nối đất mặt cầu ngoài.
  - Đo điện tích trên mặt cầu ngoài được kết quả -*Q*.

$$\boxed{\Psi = Q}$$

- **Hiện tượng:** Tổng điện tích mặt cầu ngoài có trị tuyệt đối bằng tổng điện tích nạp vào mặt cầu trong, không phụ thuộc chất điện môi giữa 2 mặt cầu.
- **Kết luận:** Tồn tại một sự ***dịch chuyển điện (ψ)*** từ mặt cầu trong ra ngoài:

I. Dịch chuyển điện



- Sự dịch chuyển điện ***ψ*** diễn ra trên toàn bộ diện tích bề mặt của quả cầu: $S_a = 4\pi a^2 (m^2)$
- Để đặc trưng cho khả năng dịch chuyển điện của một bề mặt, người đưa ra khái niệm vector ***mật độ dịch chuyển điện*** **D** [*C/m*²]:

$$\mathbf{D}\Big|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi a^2}\mathbf{a_r} \qquad \boxed{\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a_r}} \qquad \mathbf{D}\Big|_{r=b} = \frac{Q}{4\pi b^2}\mathbf{a_r}$$

- Hướng của **D** tại một điểm là ***hướng dòng dịch chuyển điện*** tại điểm đó.
- Độ lớn của **D** tại một điểm cho biết ***giá trị dịch chuyển điện trung bình*** qua mặt vuông góc với đường dịch chuyển.

I. Dịch chuyển điện

- Trong chân không:

  - ***Điện tích điểm***:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a_r} \\ \mathbf{E} &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a_r} \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}}$$

  - ***Với điện tích khối:***

$$\mathbf{E} = \int_V \frac{\rho_v dv}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\mathbf{a_r} \longrightarrow \mathbf{D} = \int_V \frac{\rho_v dv}{4\pi R^2}\mathbf{a_r}$$

Chương 3: Dịch chuyển điện - Luật Gauss - Dive

I. Dịch chuyển điện.

II. Luật Gauss.

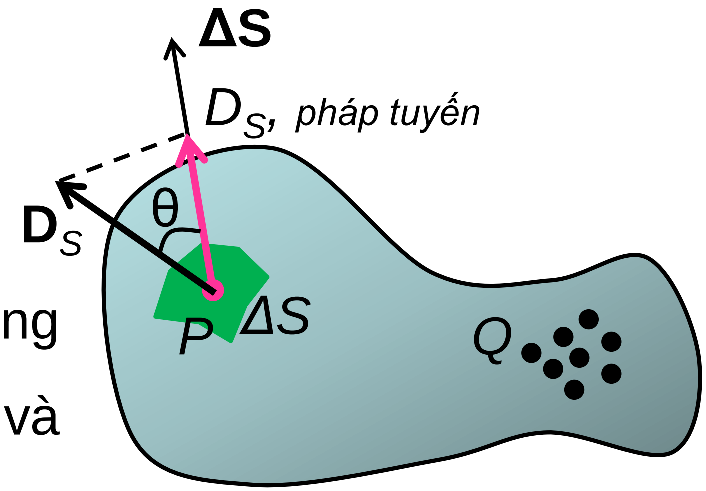
III. Dive.

IV. Phương trình Maxwell 1 trong trường tĩnh.

V. Toán tử vector ∇ và định lý Dive.

II. Luật Gauss

1. Phát biểu: *Tổng thông lượng chảy ra khỏi mặt kín S bằng tổng điện tích tự do bao trong mặt kín đó.*



- Xét các điện tích điểm bao bọc bởi mặt kín bất kỳ.
- Tại mỗi diện tích *S* của mặt kín, có thông lượng $\mathbf{D}_S$ đi qua ($\mathbf{D}_S$ thay đổi về độ lớn và hướng tại mỗi vị trí bề mặt *S*).
- Gọi Δψ: thông lượng qua *ΔS:* $\Delta\psi = D_{S,\text{pháp tuyến}}\Delta S = D_S \Delta S\cos\theta = \mathbf{D}_S \cdot \mathbf{\Delta S}$
- Tổng thông lượng qua mặt kín là (*công thức luật Gauss*):

$$\boxed{\psi = \int d\psi = \oint_{matkin} \mathbf{D}_S . d\mathbf{S} = \text{Điện tích trong mặt kín} = Q}$$

II. Luật Gauss

1. Phát biểu

$$\boxed{\psi = \int d\psi = \oint_{\text{matkin}} \mathbf{D}_S.d\mathbf{S} = \text{Điện tích trong mặt kín} = Q}$$

Điện tích điểm

$$Q = \sum Q_n$$

Điện tích đường:

$$Q = \int \rho_L dL$$

Điện tích mặt

$$Q = \int_S \rho_S dS$$

Điện tích khối:

$$Q = \int_V \rho_V dv$$

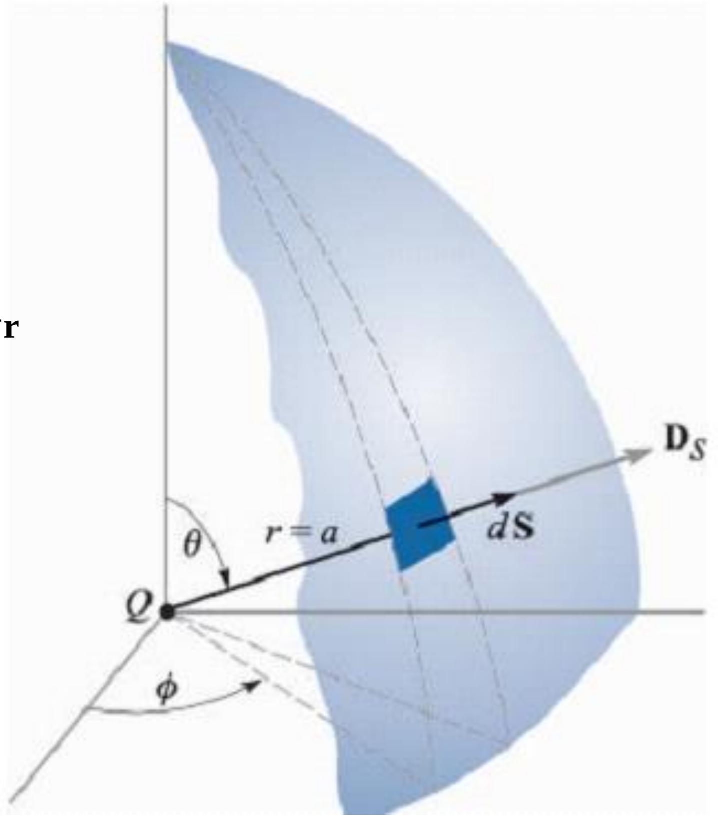
$$\boxed{\oint_S \mathbf{D}_S.d\mathbf{S} = \int_V \rho_V dv}$$

II. Luật Gauss

1. Phát biểu

- Xét điện tích điểm *Q* đặt tại tâm cầu, bán kính *a*
- Khi đó: $\mathbf{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a_r} \rightarrow \mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} = \dfrac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a_r}$
- Trên bề mặt cầu bán kính *a:* $\mathbf{D} = \dfrac{Q}{4\pi a^2}\mathbf{a_r}$
- Mặt cong d**S** trên cầu có diện tích:

$$dS = r^2 \sin\theta d\theta d\phi = a^2 \sin\theta d\theta d\phi$$



- Vậy tổng thông lượng qua mặt cầu:

$$\oint_S \mathbf{D}_S.d\mathbf{S} = \oint_S \frac{Q}{4\pi a^2} a^2 \sin\theta d\theta d\phi \mathbf{a_R}.\mathbf{a_R} = \oint_S \frac{Q}{4\pi}\sin\theta d\theta d\phi = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{Q}{4\pi}\sin\theta d\theta d\phi$$

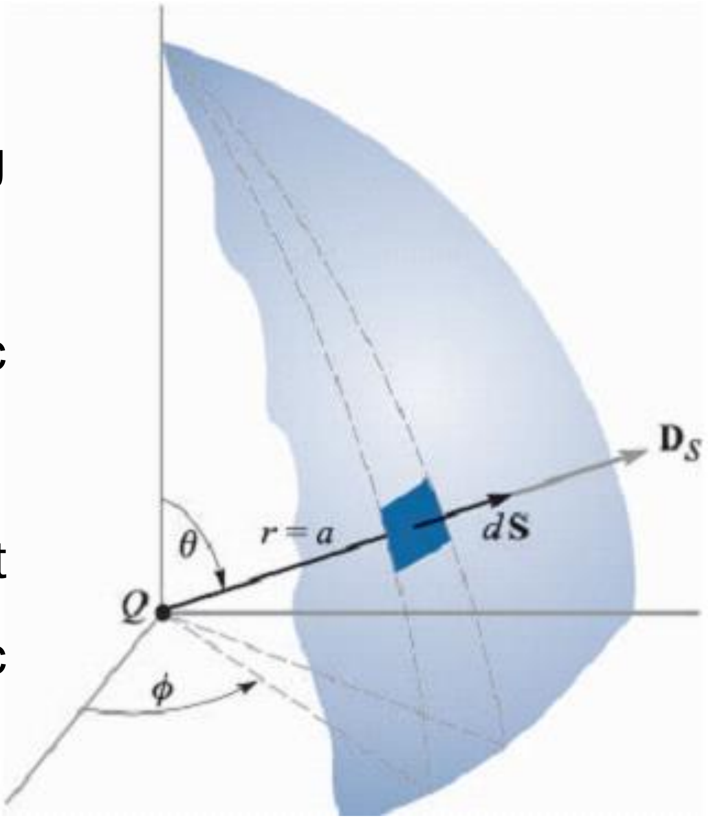
II. Luật Gauss

1. Phát biểu

$$\oint_S \mathbf{D}_S.d\mathbf{S} = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\frac{Q}{4\pi}\sin\theta d\theta d\phi = \int_0^{2\pi}\frac{Q}{4\pi}(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} d\phi = \int_0^{2\pi}\frac{Q}{2\pi}d\phi = Q$$

➢ ***Kết luận:***

- ❖ Tổng thông lượng qua mặt cầu kín bằng tổng điện tích bên trong của mặt cầu đó.
- ❖ Thí nghiệm của M. Faraday đã được kiểm chứng bằng luật Gauss..
- ❖ Đóng góp của Gauss không phải phát biểu luật mà tìm ra công thức toán học cho luật.



II. Luật Gauss

1. Phát biểu

Ví dụ 3.1: Tính tổng thông lượng qua hình lập phương giới hạn bởi 6 mặt phẳng *x*, *y*, *z* = ± 5, biết sự phân bố điện tích trong hình lập phương là:

- Điện tích điểm Q_1 = 0,1μC tại *A*(1, -2, 3), Q_2 = 0,14μC tại *B*(-1, 2, -2).
  - Áp dụng công thức: $\psi = \int d\psi = \oint_S \mathbf{D}_S . d\mathbf{S} = Q$
  - Tổng thông lượng qua hình lập phương: ψ = *Q* = 0,1 + 0,14 = 0,24 μC

- Điện tích đường ρ_L = π μC/m tại *x* = -2 và *y* = 3

$$\psi = Q = \int_{-5}^{5} \rho_L dz = \rho_L \left. z \right|_{-5}^{5} = 10\pi = 31,4\mu C$$

II. Luật Gauss

2. Ứng dụng luật Gauss

$$\boxed{Q = \oint_S \mathbf{D}_S.d\mathbf{S}}$$

- Luật Gauss được sử dụng để tính **D** (**E**) khi biết Q
- Việc tính **D** (**E**) sẽ đơn giản hơn nếu chọn được mặt kín thỏa mãn 2 điều kiện (***mặt Gauss***):
  - ❖ $\mathbf{D}_S$ vuông góc hoặc tiếp tuyến với mặt kín tại mọi điểm của mặt kín

$$\mathbf{D}_S.d\mathbf{S} = \begin{cases} D_S dS \\ 0 \end{cases}$$

  - ❖ $\mathbf{D}_S$ = const tại những vị trí trên mặt kín mà $\mathbf{D}_S.d\mathbf{S} \neq 0$

$$\rightarrow Q = \oint_S D_S dS = D_S \oint_S dS$$

II. Luật Gauss

2. Ứng dụng của luật Gauss

Ví dụ 3.2: Xét điện tích điểm *Q* đặt tại gốc tọa độ của hệ tọa độ cầu. Tính vector cường độ điện trường **E.**

- Mặt Gauss bao quanh điện tích điểm *Q* là các mặt cầu với mọi bán kính *r*, có tâm trùng với vị trí của điện tích điểm

$$Q = \oint_{cau} \mathbf{D}_S . d\mathbf{S} = D_S \oint_{cau} dS = D_S \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = D_S 4\pi r^2$$

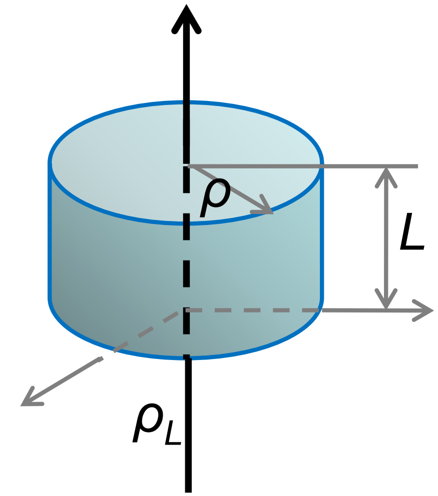
- Với mọi giá trị của *r*, $\mathbf{D}_S$ luôn chảy qua theo phương pháp tuyến, ta có

$$\boxed{\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a}_R \rightarrow \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r}$$

II. Luật Gauss

2. Ứng dụng của luật Gauss

Ví dụ 3.3: Xét một dây dẫn thẳng, dài vô hạn đặt trên trục *z* của hệ tọa độ trụ. Tính vector cường độ điện trường **E**.



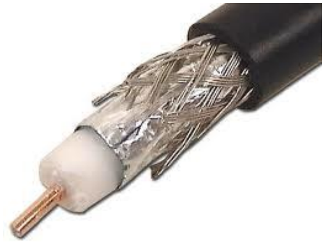
- Nhận xét: $\mathbf{D} = D_\rho \mathbf{a}_\rho$ và $D_\rho = f(\rho)$
- Mặt Gauss đối với hệ tọa độ trụ sẽ là mặt trụ bao kín lấy đường dây tích điện $Q = \oint_{\text{tru tron}} \mathbf{D}_S . d\mathbf{S} = D_S \oint_{xungquanh} dS + 0 \oint_{tren} dS + 0 \oint_{duoi} dS$

$$Q = D_S \int_{z=0}^{z=L} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \rho d\varphi dz = D_S 2\pi\rho L \rightarrow D_S = \frac{Q}{2\pi\rho L} = \frac{\rho_L L}{2\pi\rho L} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}$$

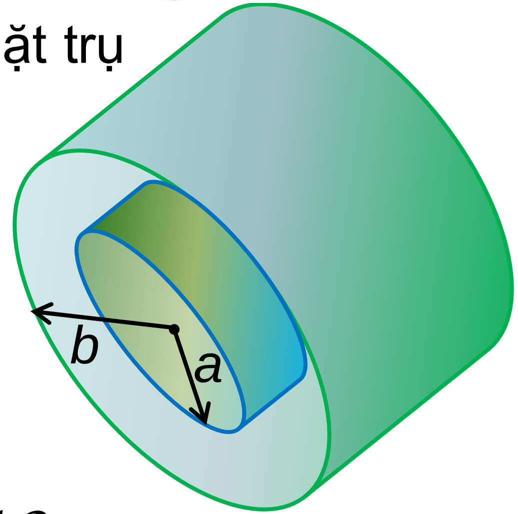
- Vậy ta có: $\boxed{D_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\rho} \rightarrow E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}}$

II. Luật Gauss

2. Ứng dụng của luật Gauss



Ví dụ 3.4: Xét hai mặt trụ tròn đồng trục dẫn điện, dài vô tận (*cáp đồng trục*). Bán kính mặt trụ trong là *a*, bán kính mặt trụ ngoài là *b*. Mật độ điện tích mặt của mặt trụ trong là ρ_S.



- Mặt Gauss: Mặt trụ tròn độ dài *L*, bán kính $a < \rho < b$

$$Q = D_S 2\pi\rho L$$

- Tổng điện tích vật dẫn trụ tròn $\rho = a$, độ dài $z = L$ là:

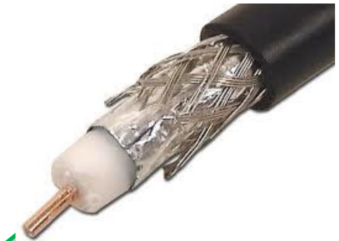
$$Q = \int_{z=0}^{z=L}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \rho_S a d\varphi dz = 2\pi a L \rho_S \to D_S = \frac{a\rho_S}{\rho} \quad \mathbf{D} = \frac{a\rho_S}{\rho}\mathbf{a}_\rho \quad (a < \rho < b)$$

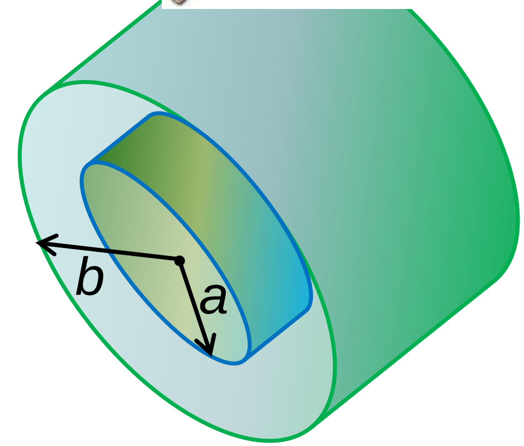
- Mặt khác: $\rho_L = Q\big|_{L=1m} = \rho_S S\big|_{L=1m} = \rho_S 2\pi a \to \rho_S = \dfrac{\rho_L}{2\pi a}$

- Vậy ta có: $\boxed{\mathbf{D} = \dfrac{\rho_L}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\rho}$

II. Luật Gauss

2. Ứng dụng của luật Gauss





- Sự dịch chuyển điện từ bề mặt của lõi hình trụ tròn bên trong sẽ hướng ra ngoài và gặp mặt tích điện âm của mặt trong của hình trụ tròn ngoài. Do đó tổng điện tích của bề mặt trụ tròn ngoài là:

$$Q_{\text{mat tru ngoai}} = -Q_{\text{mat tru trong}}$$

Mặt trụ trong

$$Q_{\text{mat tru trong}} = 2\pi a L \rho_{S,\text{mat tru trong}}$$

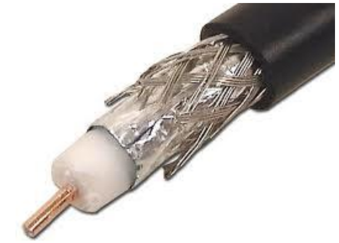
Mặt trụ ngoài

$$Q_{\text{mat tru ngoai}} = 2\pi b L \rho_{S,\text{mat tru ngoai}}$$

$$\longrightarrow \boxed{\rho_{S,\text{mat tru ngoai}} = -\frac{a}{b}\rho_{S,\text{mat tru trong}}}$$

II. Luật Gauss

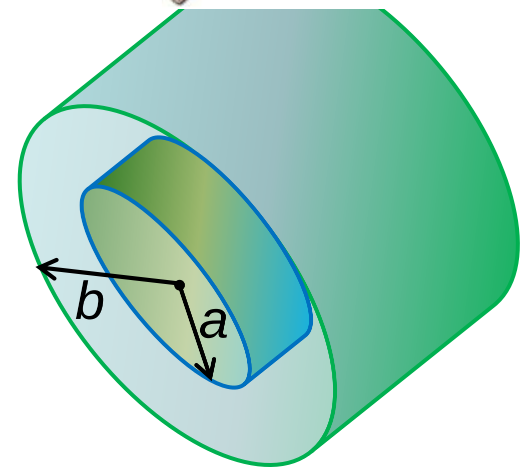
2. Ứng dụng của luật Gauss



- Chọn mặt Gauss là hình trụ tròn đồng trục với cáp đồng trục, có bán kính *ρ* > *b* (*ρ* < *a*), ta có:

$$\psi_{b<r<a} = D_S 2\pi\rho L = Q_{\text{mat tru ngoai}} + Q_{\text{mat tru trong}} = 0$$

$$\rightarrow D_S = 0 \qquad (b < \rho < a)$$



- Nhận xét:
  - Cáp đồng trục: Không tồn tại điện trường bên ngoài & bên trong cáp.
  - Một cáp đồng trục với độ dài *L* hữu hạn, hở 2 đầu, có *L* >> *b* → tụ đồng trục

II. Luật Gauss

2. Ứng dụng của luật Gauss

Ví dụ 3.5: Xét cáp đồng trục: *L* = 0,5m, bán kính lõi *1mm*, bán kính vỏ *4mm*. Giữa lõi & vỏ là không khí. Tổng điện tích của lõi: *30nC*. Tính mật độ điện tích trên lõi, vỏ ; Tính **E**, **D**.

- Mật độ điện tích mặt:

$$\rho_{S,\text{loi}} = \frac{Q_{\text{loi}}}{2\pi aL} = \frac{30(10^{-9})}{2\pi(10^{-3})(0,5)} = 9,55\mu C/m^2$$

$$\rho_{S,\text{vo}} = \frac{Q_{\text{vo}}}{2\pi bL} = \frac{-30\times10^{-9}}{2\pi(4\times10^{-3})(0,5)} = -2,39\mu C/m^2$$

- Tính vector cường độ trường **E** và vector dịch chuyển điện **D**:

$$D_\rho\Big|_{10^{-3}<\rho<4.10^{-3}} = \frac{a\rho_{S,\text{loi}}}{\rho} = \frac{10^{-3}(9,55\times10^{-6})}{\rho} = \frac{9,55}{\rho}nC/m^2$$

$$E_\rho\Big|_{10^{-3}<\rho<4.10^{-3}} = \frac{D_\rho}{\varepsilon_0} = \frac{9,55\times10^{-9}}{8,854\times10^{-12}\rho} = \frac{1079}{\rho}V/m$$

II. Luật Gauss

2. Ứng dụng của luật Gauss

Ví dụ 3.6: Hệ tọa độ cầu có: Điện tích điểm Q = 0,25μC tại tâm cầu; 2 mặt cầu tích điện: (r_1 = 1cm, ρ_S = 2mC/m^2) & (r_2 = 1,8cm, ρ_S = -0,6mC/m^2). Tính **D** tại: r_3 = 0,5cm ; r_4 = 1,5cm ; r_5 = 2,5cm. Tính mật độ điện tích mặt tại vị trí r_6 = *3cm* để có **D** = 0 tại vị trí r_7 = *3,5cm*.

Giải:

- r_3 = 0,5cm: Mặt cầu Gauss bán kính r_3 = 0,5cm bao điện tích điểm Q

$$\mathbf{D}(r_3 = 0,5cm) = \frac{Q}{4\pi a^2}\mathbf{a_r} = \frac{0.25}{4\pi 0,005^2}\mathbf{a_r} = 796\mathbf{a_r}\mu C/m^2$$

- r_4 = 1,5cm: Mặt cầu Gauss bán kính r_4 = 1,5cm bao điện tích điểm Q và mặt cầu tích điện r_1 = 1cm, ρ_S = 2mC/m^2

$$\mathbf{D}(r_4 = 1,5cm) = \frac{\sum Q}{4\pi a^2}\mathbf{a_r} = \frac{0,25.10^{-6} + 4\pi.0,01^2.2.10^{-3}}{4\pi.0,015^2}\mathbf{a_r} = 977,3\mathbf{a_r}\mu C/m^2$$

II. Luật Gauss

2. Ứng dụng của luật Gauss

Ví dụ 3.6: Hệ tọa độ cầu có: Điện tích điểm Q = 0,25μC tại tâm cầu; 2 mặt cầu tích điện: (r_1 = 1cm, ρ_S = 2mC/m^2) & (r_2 = 1,8cm, ρ_S = -0,6mC/m^2). Tính **D** tại: r_3 = 0,5cm ; r_4 = 1,5cm ; r_5 = 2,5cm. Tính mật độ điện tích mặt tại vị trí r_6 = *3cm* để có **D** = 0 tại vị trí r_7 = *3,5cm*.

Giải:

- r_5 = 2,5cm: Mặt cầu Gauss bán kính r_5 = 2,5cm bao điện tích điểm Q và cả 2 mặt cầu tích điện

$$\mathbf{D}(r_5 = 2,5cm) = \frac{\sum Q}{4\pi a^2}\mathbf{a_r}$$

$$\rightarrow \mathbf{D} = \frac{0,25.10^{-6} + 4\pi.0,01^2.2.10^{-3} + 4\pi.0,018^2.(-0,6.10^{-3})}{4\pi.0,025^2}\mathbf{a_r} = 40,79\mathbf{a_r}\mu C/m^2$$

II. Luật Gauss

2. Ứng dụng của luật Gauss

Ví dụ 3.6: Hệ tọa độ cầu có: Điện tích điểm Q = 0,25μC tại tâm cầu; 2 mặt cầu tích điện: (r_1 = 1cm, ρ_S = 2mC/m^2) & (r_2 = 1,8cm, ρ_S = -0,6mC/m^2). Tính **D** tại: r_3 = 0,5cm ; r_4 = 1,5cm ; r_5 = 2,5cm. Tính mật độ điện tích mặt tại vị trí r_6 = *3cm* để có **D** = 0 tại vị trí r_7 = *3,5cm*.

Giải:

- Để có **D** = 0 tại r_7 = *3,5cm* thì mặt Gauss tại vị trí r_6 phải có điện tích bằng tổng điện tích bao bên trong, và trái dấu.

$$\rightarrow Q = -\left[0,25.10^{-6} + 4\pi.0,01^2.2.10^{-3} + 4\pi.0,018^2.(-0,6.10^{-3})\right] = -320,37nC$$

- Vậy mật độ điện tích mặt của mặt cầu bán kính r_6 = 3cm là

$$\rho_S = \frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{-320,37}{4\pi 0,03^2} = -28,33\mu C/m^2$$

II. Luật Gauss

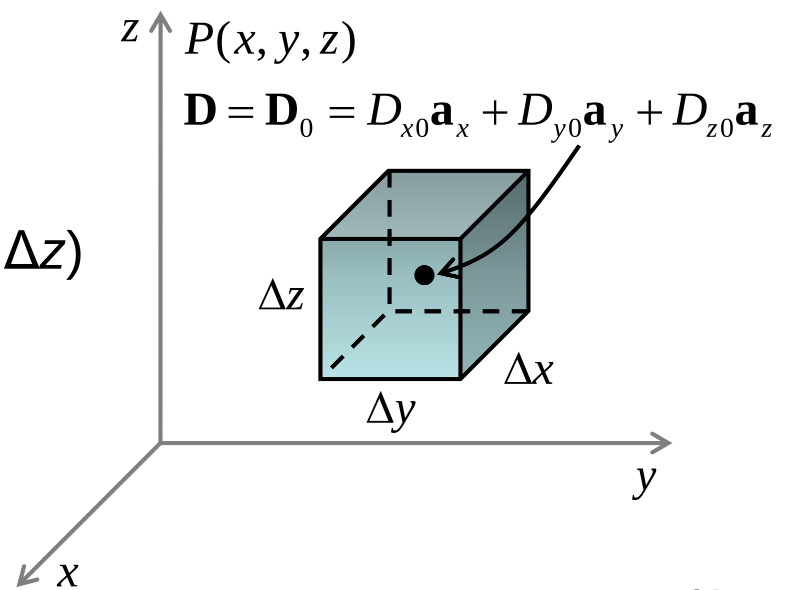
2. Ứng dụng của luật Gauss

- Việc áp dụng luật Gauss (tính **D**, **E**) cần tìm mặt Gauss (thỏa mãn 2 điều kiện: $\mathbf{D}_S$ vuông góc hoặc $\mathbf{D}_S$ = const trên mặt kín)
- Nếu khó tìm mặt Gauss: Chọn mặt kín rất nhỏ sao cho $\mathbf{D}_S$ ≈ const trên mặt kín đó.
- Xét *P(x, y, z)*:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 = D_{x0}\mathbf{a}_x + D_{y0}\mathbf{a}_y + D_{z0}\mathbf{a}_z$$

- Chọn mặt kín hình lập phương (Δ*x*, Δ*y*, Δ*z*) có tâm là điểm *P:* **D** ≈ const trên từng mặt.

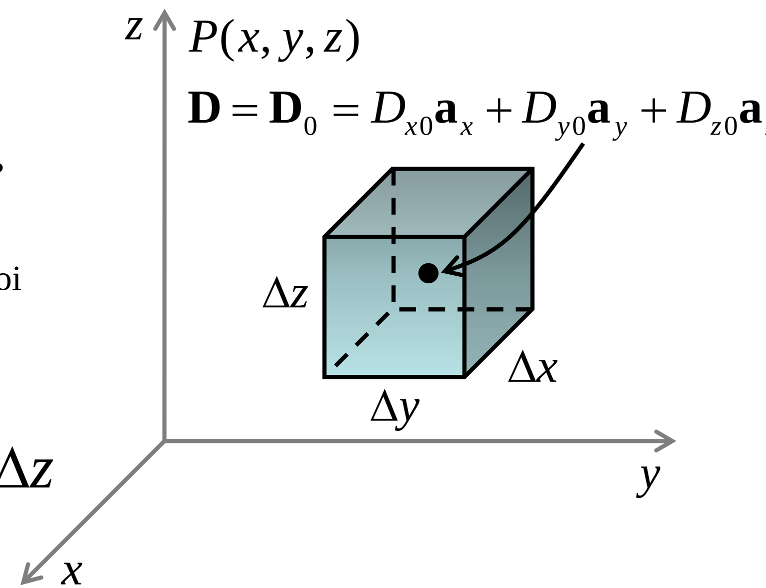
$$Q = \oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{\text{truoc}} + \int_{sau} + \int_{\text{trai}} + \int_{\text{phai}} + \int_{\text{tren}} + \int_{\text{duoi}}$$



II. Luật Gauss

2. Ứng dụng của luật Gauss

$$Q = \oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{\text{truoc}} + \int_{sau} + \int_{\text{trai}} + \int_{\text{phai}} + \int_{\text{tren}} + \int_{\text{duoi}}$$



➢ Xét mặt trước:

$$\int_{\text{truoc}} \simeq \mathbf{D}_{\text{truoc}}.\Delta\mathbf{S}_{\text{truoc}} = \mathbf{D}_{\text{truoc}}.\Delta y\Delta z\mathbf{a}_x = D_{x,\text{truoc}}\Delta y\Delta z$$

➢ Do *P* là tâm hình lập phương → khoảng cách từ mặt trước đến *P* là *Δx/2*

$$D_{x,\text{truoc}} \simeq D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}(\text{toc do thay doi cua } D_x \ \textit{theo } x) = D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}$$

trong đó D_{x0} là giá trị của D_x tại *P*

➢ Vậy ta có: $\int_{\text{truoc}} \simeq \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y\Delta z$

II. Luật Gauss

2. Ứng dụng của luật Gauss

- Tương tự, mặt sau có: $\int_{sau} \simeq \mathbf{D}_{sau}.\Delta\mathbf{S}_{sau} = \mathbf{D}_{sau}.(-\Delta y\Delta z\mathbf{a}_x) = -D_{x,sau}\Delta y\Delta z$

$$D_{x,sau} \simeq D_{x0} - \frac{\Delta x}{2}\times(\text{toc do thay doi cua } D_x \text{ } theo\ x) = D_{x0} - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}$$

$$\rightarrow \int_{sau} \simeq \left(-D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y\Delta z$$

- Khi đó ta có: $\int_{\text{truoc}} + \int_{sau} \simeq \dfrac{\partial D_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z$

- Tương tự xét cặp mặt (phải - trái), (trên - dưới):

$$\int_{\text{phai}} + \int_{\text{trai}} \simeq \frac{\partial D_y}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z \qquad \int_{\text{tren}} + \int_{\text{duoi}} \simeq \frac{\partial D_z}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z$$

II. Luật Gauss

2. Ứng dụng của luật Gauss

➢ Tóm lại:

$$Q = \oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{truoc} + \int_{sau} + \int_{trai} + \int_{phai} + \int_{tren} + \int_{duoi} \simeq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\boxed{Q_{\Delta v} \simeq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta v}$$

II. Luật Gauss

2. Ứng dụng của luật Gauss

Ví dụ 3.7: Xác định tổng điện tích của khối thể tích $10^{-9}m^3$ đặt tại gốc tọa độ biết vector dịch chuyển điện: $\mathbf{D} = e^{-x}\sin y\mathbf{a}_x - e^{-x}\cos y\mathbf{a}_y + 2z\mathbf{a}_z (C/m^2)$

- Độ biến thiên của **D** theo các trục *x, y, z* là:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = -e^{-x}\sin y \qquad \frac{\partial D_y}{\partial y} = e^{-x}\sin y \qquad \frac{\partial D_z}{\partial z} = 2$$

- Tại gốc tọa độ ta có

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = -e^{-x}\sin y = 0 \qquad \frac{\partial D_y}{\partial y} = e^{-x}\sin y = 0 \qquad \frac{\partial D_z}{\partial z} = 2$$

- Vậy tổng điện tích của $10^{-9}m^3$ đặt tại gốc tọa độ là:

$$Q_{\Delta v} \simeq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right)\Delta v = 2\Delta v = 2.10^{-9} = 2nC$$

II. Luật Gauss

2. Ứng dụng của luật Gauss

Ví dụ 3.8: Trong chân không: $\mathbf{D} = 8xyz^4\mathbf{a}_x + 4x^2z^4\mathbf{a}_y + 16x^2yz^3\mathbf{a}_z\,(pC/m^2)$

a. Tìm thông lượng qua hộp chữ nhật: *z*=2, 0<*x*<2, 1<*y*<3 theo hướng $\mathbf{a}_z$.

b. Tính **E** tại *P(2, -1, 3)*

c. Tính tổng điện tích quả cầu có thể tích $10^{-12}m^3$ đặt tại *P(2, -1, 3)*.

Giải:

a. Thông lượng qua hộp chữ nhật *z = 2, 0 < x < 2, 1 < y < 3* theo hướng $\mathbf{a_z}$

$$\Phi = \int_0^2\int_1^3 \mathbf{D_z}dxdy = \int_0^2\int_1^3 16x^2y(2)^3dxdy = 16\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2\frac{1}{2}y^2\Big|_1^3 = 1365,33\,pC$$

b. **E** tại *P(2, -1, 3)*

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0} = \frac{\left[8.2(-1)3^4\mathbf{a}_x + 4.2^2.3^4\mathbf{a}_y + 16.2^2(-1)3^3\mathbf{a}_z\right].10^{-12}}{8,85.10^{-12}}$$

$$\rightarrow \mathbf{E} = -146,44\mathbf{a_x} + 146,4\mathbf{a_y} - 195,2\mathbf{a_z}V/m$$

II. Luật Gauss

2. Ứng dụng của luật Gauss

Ví dụ 3.8: Trong chân không: $\mathbf{D} = 8xyz^4\mathbf{a}_x + 4x^2z^4\mathbf{a}_y + 16x^2yz^3\mathbf{a}_z\,(pC/m^2)$

a. Tìm thông lượng qua hộp chữ nhật: *z=2, 0<x<2, 1<y<3* theo hướng $\mathbf{a}_z$.

b. Tính **E** tại *P(2, -1, 3)*

c. Tính tổng điện tích của quả cầu có thể tích *$10^{-12}m^3$* đặt tại *P(2, -1, 3).*

Giải:

c. Tổng điện tích của quả cầu có thể tích 10^{-12}m³ đặt tại *P*(2, -1, 3).

$$Q_{cau} \simeq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Bigg|_{P(2,-1,3)} \times 10^{-12} = 10^{-12}.(8yz^4 + 48x^2yz^2)\Big|_{P(2,-1,3)}$$

$$\rightarrow Q_{cau} \simeq -2,376.10^{-21}C$$

Chương 3: Dịch chuyển điện - Luật Gauss - Dive

I. Dịch chuyển điện.

II. Luật Gauss.

III. Dive.

IV. Phương trình Maxwell 1 trong trường tĩnh.

V. Toán tử vector ∇ và định lý Dive.

III. Dive

- Xuất phát từ công thức: $\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = Q_{\Delta v} \simeq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Delta v$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) \simeq \frac{\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S}}{\Delta v} = \frac{Q}{\Delta v}$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{Q}{\Delta v} = \rho_v$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{A}.d\mathbf{S}}{\Delta v}$$

- Công thức định nghĩa Đive:

$$\boxed{\mathit{Dive}\text{ cua } \mathbf{A} = \mathit{div}\mathbf{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{A}.d\mathbf{S}}{\Delta v}}$$

III. Dive

$$\mathit{Dive}\ \text{cua}\ \mathbf{A} = \mathit{div}\mathbf{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{A}.d\mathbf{S}}{\Delta v}$$

Hệ tọa độ Descartes: $\mathit{div}\mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$

Hệ tọa độ trụ tròn: $\mathit{div}\mathbf{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$

Hệ tọa độ cầu: $\mathit{div}\mathbf{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta D_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi}$

III. Dive

$$Dive \text{ cua } \mathbf{A} = div\mathbf{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{A}.d\mathbf{S}}{\Delta v}$$

- *div***A** (*dive của hàm mật độ thông lượng **A***) là thông lượng chảy ra từ mặt kín của mỗi đơn vị thể tích có thể tích tiến đến zero.
- *Div* là phép toán có ***đối số là vector***, nhưng cho ***kết quả là giá trị vô hướng.***
- *Div* cho biết *số lượng thông lượng* (trên mỗi đơn vị thể tích) chảy ra khỏi một mặt kín (không cho thông tin về hướng của thông lượng).

III. Dive

*Ví dụ 3.9: Tìm div***D** tại gốc tọa độ: **D** = $e^{-x}\sin y\,\mathbf{a}_x - e^{-x}\cos y\,\mathbf{a}_y + 2z\,\mathbf{a}_z$

Giải:

- Áp dụng công thức tính *div*:

$$div\mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = -e^{-x}\sin y + e^{-x}\sin y + 2 = 2$$

- Giá trị *div***D** = *2* = *const* mà không phụ thuộc vào vị trí cần tính.

- Nếu đơn vị của **D** là C/m^2, khi đó đơn vị của *div***D** sẽ là C/m^3 (mật độ điện tích khối).

III. Dive

*Ví dụ 3.10: Tìm div***D** tại:

$a)\ \mathbf{D} = (2xyz - y^2)\mathbf{a_x} + (x^2z - 2xy)\mathbf{a_y} + x^2y\mathbf{a_z} C/m^2$ tai $P_A(2,3,-1)$

- Áp dụng công thức tính *div* trong hệ tọa Descartes:

$$div\mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 2yz - 2x + 0 = -10$$

$b)\ \mathbf{D} = 2\rho z^2 \sin^2\varphi\mathbf{a_\rho} + \rho z^2 \sin 2\varphi\mathbf{a_\varphi} + 2\rho^2 z \sin^2\varphi\mathbf{a_z} C/m^2$

tai $P_B(\rho = 2, \varphi = 110^0, z = -1)$

- Áp dụng công thức tính *div* trong hệ tọa độ trụ tròn:

$$div\mathbf{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$div\mathbf{D} = 4z^2\sin^2\varphi + 2z^2\cos 2\varphi + 2\rho^2\sin^2\varphi = 9$$

III. Dive

*Ví dụ 3.10: Tìm div***D** tại:

$$c)\ \mathbf{D} = 2r\sin\theta\cos\varphi\mathbf{a_r} + r\cos\theta\cos\varphi\mathbf{a_\theta} - r\sin\varphi\mathbf{a_\varphi} C/m^2$$

$$\text{tai } P_C(r = 1.5, \theta = 30^0, \varphi = 50^0)$$

- Áp dụng công thức tính *div* trong hệ tọa độ cầu:

$$div\mathbf{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta D_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$div\mathbf{D} = 6\sin\theta\cos\varphi - \frac{\cos\varphi\cos 2\theta}{\sin\theta} + \frac{\cos\varphi}{\sin\theta} = 2,57$$

Chương 3: Dịch chuyển điện - Luật Gauss - Dive

IV. Phương trình Maxwell 1 trong trường tĩnh

- Từ công thức định nghĩa *div* có: $div\mathbf{D} = \lim_{\Delta v \to 0} \dfrac{\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S}}{\Delta v}$
- Mặt khác, theo luật Gauss: $\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = Q \xrightarrow[\text{vi khối } \Delta v]{\text{Xét cho một}} \dfrac{\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S}}{\Delta v} = \dfrac{Q}{\Delta v}$
- Xét vi khối có thể tích tiến đến zero: $\lim_{\Delta v \to 0} \dfrac{\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \to 0} \dfrac{Q}{\Delta v} = \rho_v$

$$\boxed{div\mathbf{D} = \rho_v}$$ (***Phương trinh Maxwell 1***)

IV. Phương trình Maxwell 1 trong trường tĩnh

$$\boxed{div\mathbf{D} = \rho_v}$$

- Công thức Maxwell 1 áp dụng cho điện trường tĩnh và từ trường dừng
- ***Phát biểu***: ***Thông lượng trên một đơn vị thể tích chảy ra khỏi một vi khối rất nhỏ đúng bằng giá trị mật độ điện tích khối tại đó***
- Phương trình Maxwell 1 là ***dạng vi phân của luật Gauss*** vì:
  - Luật Gauss liên hệ giá trị thông lượng của một điện tích (vật mang điện) đi ra khỏi một mặt kín bao quanh.
  - Phương trình Maxwell 1 phát biểu về thông lượng trên mỗi đơn vị thể tích chảy ra khỏi một vi khối rất nhỏ (coi như 1 điện tích điểm).
- Luật Gauss là ***dạng tích phân của phương trình Maxwell 1***

IV. Phương trình Maxwell 1 trong trường tĩnh

Ví dụ 3.11: Tính mật độ điện tích khối ρ_v trong không gian xung quanh của một điện tích điểm *Q* đặt tại gốc tọa độ.

Giải:

- Vector thông lượng **D** của điện tích điểm *Q* tại gốc tọa độ: $\mathbf{D} = \dfrac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a_r}$
- Áp dụng công thức tính *div***D** trong hệ tọa độ cầu:

$$div\mathbf{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta D_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\rightarrow div\mathbf{D} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{Q}{4\pi r^2}\right) = 0 \quad (\mathrm{r} \neq 0) \qquad \rightarrow \rho_v = 0$$

Vậy mật độ điện tích khối ρ_v của điện tích điểm *Q* bằng zero tại mọi điểm trong không gian và không xác định tại gốc tọa độ

Chương 3: Dịch chuyển điện - Luật Gauss - Dive

I. Dịch chuyển điện.

II. Luật Gauss.

III. Dive.

IV. Phương trình Maxwell 1 trong trường tĩnh.

V. Toán tử vector ∇ và định lý Dive.

V. Toán tử vector ∇ và định lý Dive

1. Toán tử vector ∇

Định nghĩa một ***toán tử vector nabla*** (gọi là *toán tử del*)

$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a_x} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a_y} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a_z}}$$

- Xét: $\nabla.\mathbf{D} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a_x} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a_y} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a_z}\right).\left(D_x\mathbf{a_x} + D_y\mathbf{a_y} + D_z\mathbf{a_z}\right)$

$$\boxed{\rightarrow \nabla.\mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = div\mathbf{D}}$$

V. Toán tử vector ∇ và định lý Dive.

2. Định lý Dive

- Xuất phát từ luật Gauss, có: $\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = Q$
- Mặt khác: $Q = \int_{\text{khoi}} \rho_v dv$ trong đó $\nabla.\mathbf{D} = \rho_v$
- Vậy ta có: $$\boxed{\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{\text{khoi}} \nabla.\mathbf{D} dv}$$
- ***Phát biểu***: *Tổng thành phần pháp tuyến của một trường vector bất kỳ có đạo hàm riêng trên một mặt kín đúng bằng tổng dive của trường vector đó trong không gian nằm trong mặt kín.*

V. Toán tử vector ∇ và định lý Dive.

2. Định lý Dive

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{khoi} \nabla.\mathbf{D}dv$$

Ví dụ 3.12: Kiểm nghiệm định lý Dive biết $\mathbf{D} = 2xy\mathbf{a_x} + x^2\mathbf{a_y}$ C/m^2 và hình hộp chữ nhật giới hạn bởi mặt phẳng $0 < x < 1$; $0 < y < 2$, $0 < z < 3$

Giải:

- Vế trái:

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{truoc} + \int_{sau} + \int_{trai} + \int_{phai} + \int_{tren} + \int_{duoi}$$

$$\int_{truoc} = \int_{z=0}^{z=3}\int_{y=0}^{y=2} (\mathbf{D})_{x=1}.(dydz\mathbf{a_x}) = \int_{z=0}^{z=3}\int_{y=0}^{y=2} D_x\big|_{x=1}.(dydz) = \int_{z=0}^{z=3}\int_{y=0}^{y=2} 2ydydz$$

$$\int_{truoc} = \int_{z=0}^{z=3} 4dz = 12C$$

V. Toán tử vector ∇ và định lý Dive.

2. Định lý Dive

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{khoi} \nabla.\mathbf{D}dv$$

Ví dụ 3.12: Kiểm nghiệm định lý Dive biết **D** = $2xy\mathbf{a_x} + x^2\mathbf{a_y}$ *C/m*^{2} và hình hộp chữ nhật giới hạn bởi mặt phẳng $0 < x < 1$; $0 < y < 2$, $0 < z < 3$

Giải:

- Vế trái: $$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{truoc} + \int_{sau} + \int_{trai} + \int_{phai} + \int_{tren} + \int_{duoi}$$

$$\int_{sau} = \int_{z=0}^{z=3}\int_{y=0}^{y=2} (\mathbf{D})_{x=0}.(-dydz\mathbf{a_x}) = \int_{z=0}^{z=3}\int_{y=0}^{y=2} D_x\Big|_{x=0}.(-dydz) = 0$$

$$\int_{phai} = \int_{z=0}^{z=3}\int_{x=0}^{x=1} (\mathbf{D})_{y=2}.(dxdz\mathbf{a}_y) = \int_{z=0}^{z=3}\int_{x=0}^{x=1} D_y\Big|_{y=2}.(dxdz) = \int_{z=0}^{z=3}\int_{x=0}^{x=1} x^2(dxdz)$$

V. Toán tử vector ∇ và định lý Dive.

2. Định lý Dive

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{khoi} \nabla.\mathbf{D}dv$$

Ví dụ 3.12: Kiểm nghiệm định lý Dive biết $\mathbf{D} = 2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y$ *C/m²* và hình hộp chữ nhật giới hạn bởi mặt phẳng $0 < x < 1$; $0 < y < 2$, $0 < z < 3$

Giải:

- Vế trái:

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{truoc} + \int_{sau} + \int_{trai} + \int_{phai} + \int_{tren} + \int_{duoi}$$

$$\int_{trai} = \int_{z=0}^{z=3}\int_{x=0}^{x=1} (\mathbf{D})_{y=0}.(-dxdz\mathbf{a}_y) = -\int_{z=0}^{z=3}\int_{x=0}^{x=1} D_y\Big|_{y=0}.(dxdz)$$

$$\rightarrow \int_{trai} = -\int_{z=0}^{z=3}\int_{x=0}^{x=1} x^2(dxdz)$$

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{khoi} \nabla.\mathbf{D}dv$$

V. Toán tử vector ∇ và định lý Dive.

2. Định lý Dive

Ví dụ 3.12: Kiểm nghiệm định lý Dive biết **D** = 2xy**a**$_x$ + x^2**a**$_y$ *C/m^2* và hình hộp chữ nhật giới hạn bởi mặt phẳng 0 < *x < 1 ; 0 < y < 2 , 0 < z < 3*

Giải:

- Vế trái:

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{truoc} + \int_{sau} + \int_{trai} + \int_{phai} + \int_{tren} + \int_{duoi}$$

Vì **D** = 2xy**a**$_x$ + x^2**a**$_y$, không phụ thuộc vào *z* → **D** song song với mặt trên và mặt dưới → **D**.*d***S** = 0

$$\rightarrow \int_{tren} = \int_{duoi} = 0$$

V. Toán tử vector ∇ và định lý Dive.

2. Định lý Dive

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{khoi} \nabla.\mathbf{D}dv$$

Ví dụ 3.12: Kiểm nghiệm định lý Dive biết **D** = $2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y$ *C/m²* và hình hộp chữ nhật giới hạn bởi mặt phẳng 0 < *x* < *1 ; 0* < *y* < *2 , 0* < *z* < *3*

Giải:

- Vế trái:

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{truoc} + \int_{sau} + \int_{trai} + \int_{phai} + \int_{tren} + \int_{duoi}$$

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = 12 + 0 + \int_{z=0}^{z=3}\int_{x=0}^{x=1} x^2(dxdz) - \int_{z=0}^{z=3}\int_{x=0}^{x=1} x^2(dxdz) + 0 + 0$$

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = 12C$$

V. Toán tử vector ∇ và định lý Dive.

2. Định lý Dive

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{\text{khoi}} \nabla.\mathbf{D}dv$$

Ví dụ 3.12: Kiểm nghiệm định lý Dive biết $\mathbf{D} = 2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y$ C/m^2 và hình hộp chữ nhật giới hạn bởi mặt phẳng $0 < x < 1$; $0 < y < 2$, $0 < z < 3$

Giải:

- Vế phải: $\int_V \nabla.\mathbf{D}dV$

$$\nabla.\mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}2xy + \frac{\partial}{\partial y}x^2 + \frac{\partial}{\partial z}0 = 2y$$

$$\int_V \nabla.\mathbf{D}dV = \int_V 2ydV = \int_{z=0}^{z=3}\int_{y=0}^{y=2}\int_{x=0}^{x=1} 2ydxdydz = \int_{z=0}^{z=3}\int_{y=0}^{y=2} 2ydydz = \int_{z=0}^{z=3} 4dz = 12C$$

V. Toán tử vector ∇ và định lý Dive.

2. Định lý Dive

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{khoi} \nabla.\mathbf{D}dv$$

Ví dụ 3.12: Kiểm nghiệm định lý Dive biết $\mathbf{D} = 2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y$ C/m^2 và hình hộp chữ nhật giới hạn bởi mặt phẳng $0 < x < 1$; $0 < y < 2$, $0 < z < 3$

Giải:

$$\rightarrow \mathrm{VT} = \oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_V \nabla.\mathbf{D}dV = \mathrm{VP} = 12C = Q$$

Nhận xét:

- Có thể dụng định lý *dive* để tính thông lượng chảy ra khỏi một mặt kín hoặc tính điện tích bên trong (được bao bởi) một mặt kín.
- Có 2 cách tính:
  - ***Luật Gauss***
  - ***Luật Dive***

V. Toán tử vector ∇ và định lý Dive.

2. Định lý Dive

Ví dụ 3.13: Kiểm nghiệm định lý Dive biết **D** = 6ρsin0,5φ$\mathbf{a}_\rho$ + 1,5ρcos0,5φ$\mathbf{a}_\varphi$ C/m^2 và phần mặt cong giới hạn bởi *ρ=2, φ=0 ; φ=π , và z=0, z=5*

Giải:

$$\boxed{\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_V \nabla.\mathbf{D}dv}$$

Đ/S: 225