Chương 1: Giải tích vector

I. Vô hướng và vector.

II. Hệ tọa độ Descartes.

III. Tích vô hướng - Tích có hướng.

IV. Hệ tọa độ trụ.

V. Hệ tọa độ cầu.

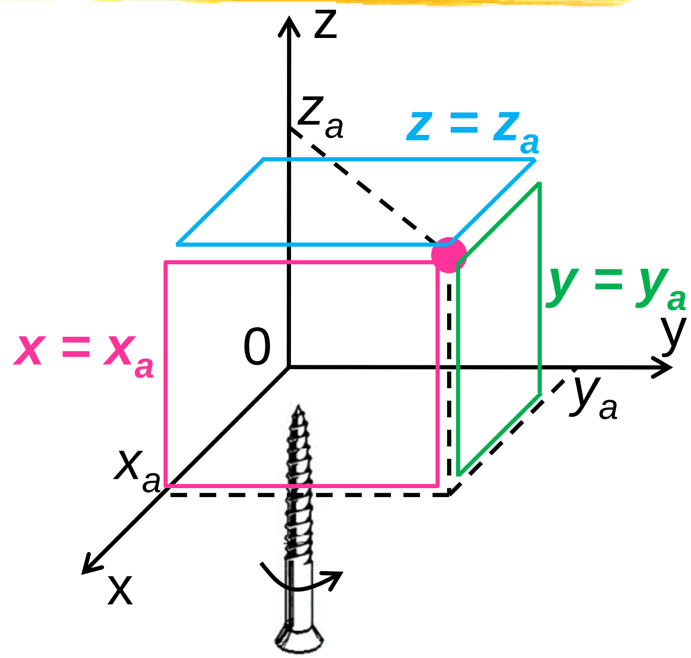
VI. Một số công thức giải tích vector

I. Vô hướng và Vector.

- ***Đại lượng vô hướng:*** Là đại lượng được biểu diễn bằng 1 số thực (dương, âm).
  - Ví dụ: Khoảng cách, thời gian, nhiệt độ, khối lượng, áp suất, thể tích …
  - Ký hiệu: *t, m, E, P, …*

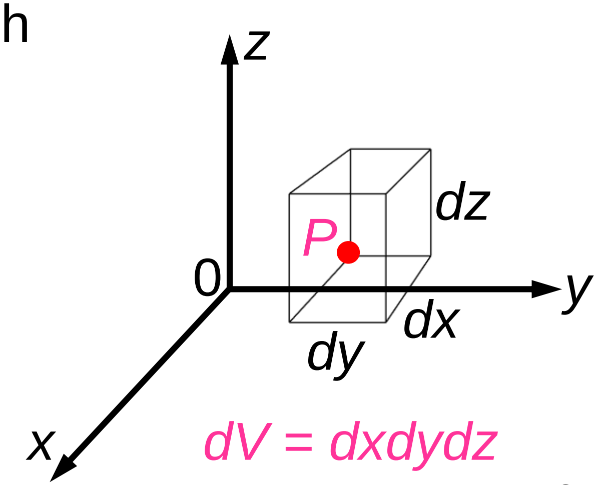
- ***Đại lượng vector***: Là đại lượng được biểu diễn bằng ***độ lớn*** (số thực dương, âm) và ***hướng*** trong không gian (2 chiều, 3 chiều, … nhiều chiều).
  - Ví dụ: Lực, vận tốc, gia tốc, điện trường, từ trường …
  - Ký hiệu: **A, B, E, H,** … (có thể thay bằng $\overline{A}, \overline{B}, \overline{E}, \overline{H}, ..., \vec{A}, \vec{B}, \vec{E}, \vec{H}, ...$)
- Các hệ tọa độ biểu diễn:
  - Hệ tọa độ Descartes.
  - Hệ tọa độ trụ.
  - Hệ tọa độ cầu.

II. Hệ tọa độ Descartes.



- Được tạo bởi 3 trục vuông góc từng đôi một.
- Các trục được chọn theo quy tắc vặn đinh ốc.
- Một điểm A trong không gian Descartes :
  - Giao điểm của 3 mặt phẳng.
  - Xác định được tọa độ x_a, y_a, z_a.
- *P* là điểm gốc của vi khối có các vi phân kích thước *dx*, *dy*, *dz*.

  → Thể tích của vi khối: $dV = dxdydz$

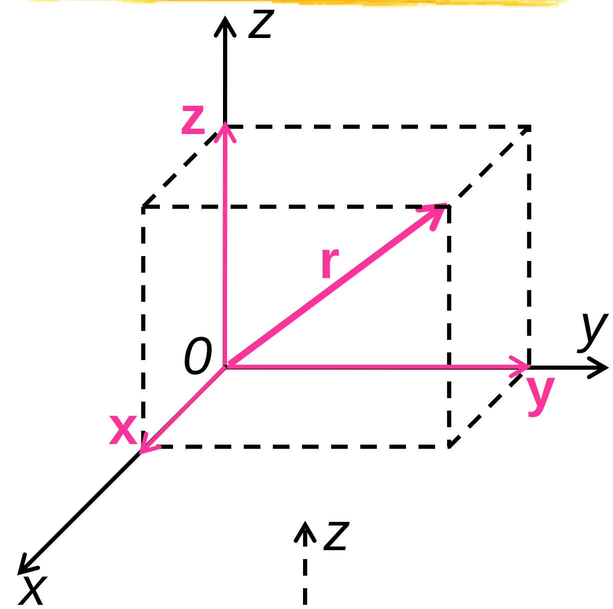


II. Hệ tọa độ Descartes.

➢ Xét vector **r** trong hệ tọa độ Descartes:

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}$$

x, y, z là các vector thành phần của **r**



➢ Vector thành phần **x, y, z**

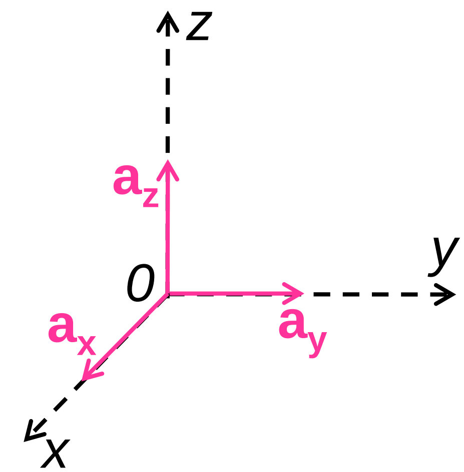
❖ Độ lớn phụ thuộc vào vector **r**.

❖ Hướng không thay đổi.

➢ Phân tích theo các vector đơn vị.

$$\mathbf{x} = x\mathbf{a_x}\ ;\ \mathbf{y} = y\mathbf{a_y}\ ;\ \mathbf{z} = z\mathbf{a_z}$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{a_x} + y\mathbf{a_y} + z\mathbf{a_z} = r_x\mathbf{a_x} + r_y\mathbf{a_y} + r_z\mathbf{a_z}$$



➢ Độ lớn của vector:

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

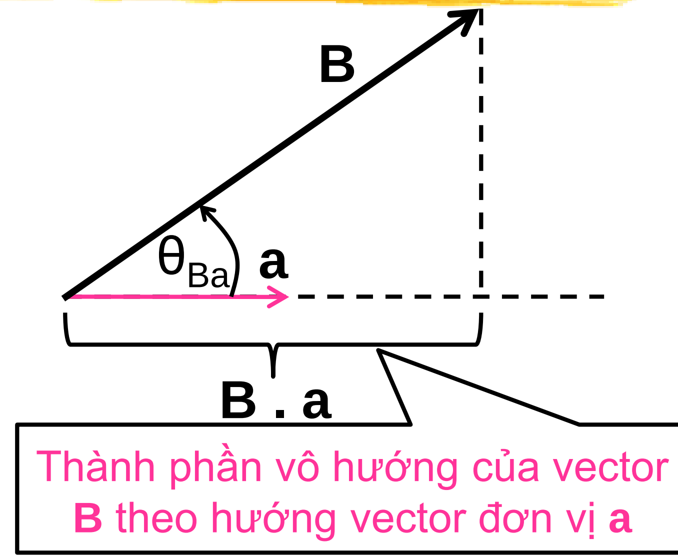
➢ Vector đơn vị theo hướng của **R**: $\mathbf{a}_R = \dfrac{\mathbf{R}}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} = \dfrac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}$

III. Tích vô hướng – Tích có hướng.

1. Tích vô hướng

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \cos\theta_{AB}$$

- **|A|, |B|** độ lớn của vector **A, B**
- θ_{AB} là góc nhỏ hơn giữa *2* vector **A** và **B**



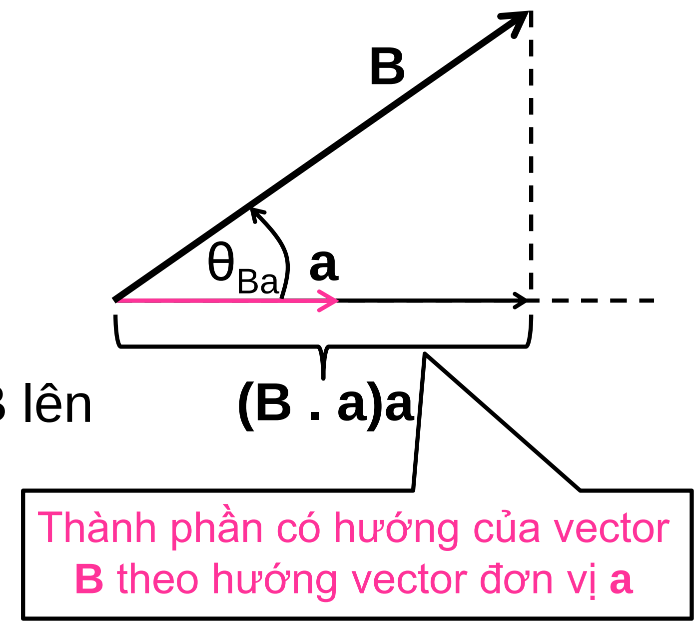
➢ $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$; $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

➢ $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 = |\mathbf{A}|^2$; $\mathbf{a}_A \cdot \mathbf{a}_A = 1$

➢ Xét vector **B** và vector đơn vị **a**:

❖ $\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{B}|\,|\mathbf{a}| \cos\theta_{Ba} = |\mathbf{B}| \cos\theta_{Ba}$

❖ **(B.a)a** → vector hình chiếu của vector **B** lên phương (hướng) của vector đơn vị **a**



III. Tích vô hướng – Tích có hướng.

1. Tích vô hướng

Ví dụ1.1: Xét trường vector **G** = $y\mathbf{a}_x - 2.5x\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$, điểm *Q(4, 5, 2)*, vector

$$\mathbf{a}_N = \frac{1}{3}\left(2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z\right).$$

a. Tính giá trị của trường vector **G** tại điểm *Q*

b. Tính thành phần vô hướng của **G** tại *Q* theo hướng của vector $\mathbf{a}_N$

c. Tính thành phần có hướng của **G** tại *Q* theo hướng của vector $\mathbf{a}_N$

Giải:

a. Giá trị trường vector tại *Q*: $\mathbf{G}(\mathbf{r}_Q) = 5\mathbf{a}_x - 2{,}5.4.\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z = 5\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$

b. Thành phần vô hướng:

$$\mathbf{G}\bullet\mathbf{a}_N = (5\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z)\bullet\frac{1}{3}(2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z) = \frac{1}{3}(10 - 10 - 6) = -2$$

c. Thành phần có hướng:

$$(\mathbf{G}\bullet\mathbf{a}_N)\mathbf{a}_N = (-2)\frac{1}{3}(2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z) = -1.333\mathbf{a}_x - 0.667\mathbf{a}_y + 1.333\mathbf{a}_z$$

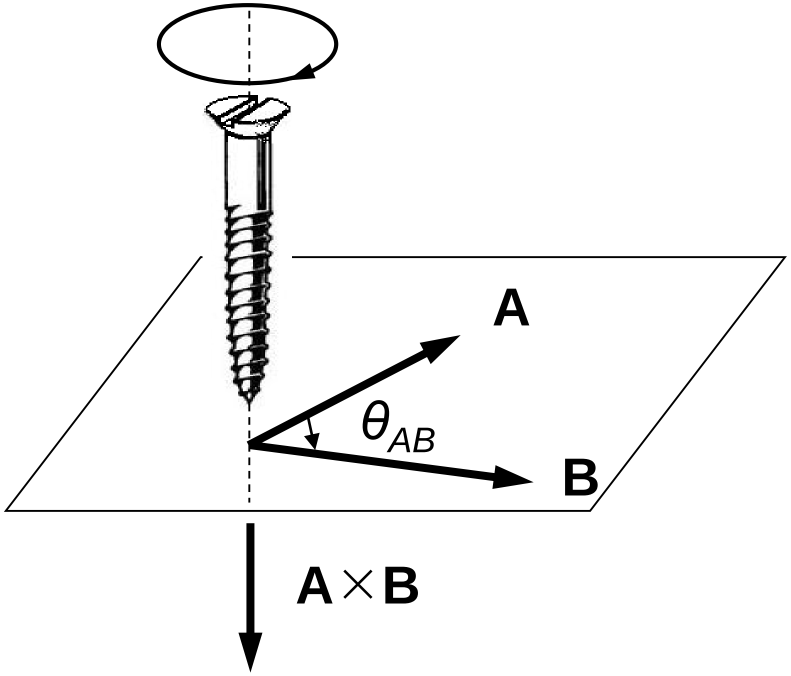
III. Tích vô hướng – Tích có hướng.

2. Tích có hướng

➤ Định nghĩa:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{a}_N |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin\theta_{AB}$$

trong đó $\mathbf{a}_N$ vector pháp tuyến



$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A})$ $$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

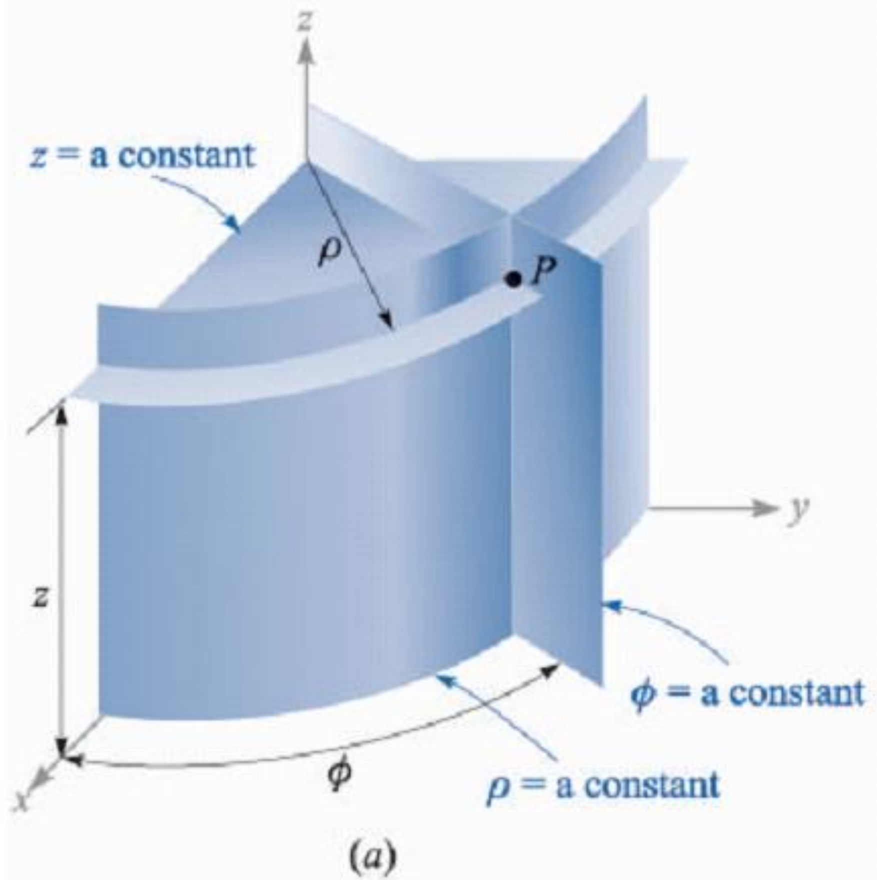
$\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$, $\mathbf{a}_z$: véctơ đơn vị của các trục x, y, z

Ví dụ: $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$; $\mathbf{B} = -4\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -13\mathbf{a}_x - 14\mathbf{a}_y - 16\mathbf{a}_z$$

IV. Hệ tọa độ trụ tròn

- Điểm *P* trong hệ tọa độ trụ tròn:
  - *ρ* khoảng cách từ *P* đến trục trụ.
  - *φ* góc dương hợp bởi trục tọa độ góc với đường thẳng nối gốc tọa độ với hình chiếu của *P* lên mặt tọa độ cực.
  - *z* độ cao của điểm *P* so với mặt phẳng của hệ tọa độ góc.



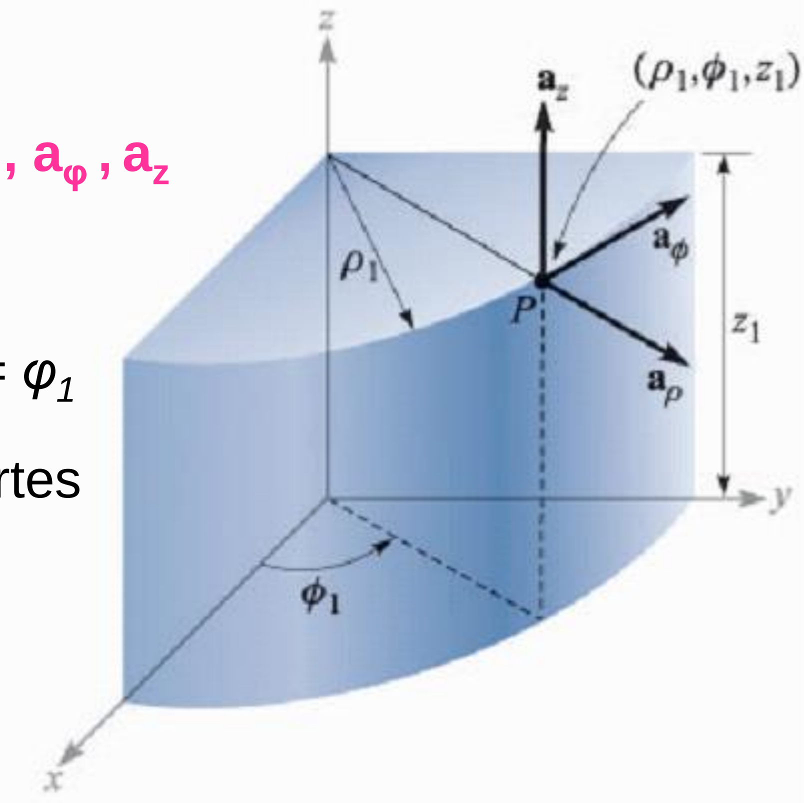
P(ρ, φ, z)

- Có thể coi *P* là giao của *3* mặt:
  - Mặt phẳng *z = const*
  - Mặt cong *ρ = const*.
  - Mặt phẳng đường sinh *φ = const.*

- ~~Không xét các hệ tọa độ trụ ellipse, hệ tọa độ trụ hyperbol, …~~

IV. Hệ tọa độ trụ tròn .

- Vector đơn vị trong hệ tọa độ trụ tròn: $\mathbf{a}_\rho$, $\mathbf{a}_\varphi$, $\mathbf{a}_z$
  - $\mathbf{a}_\rho$: vector pháp tuyến mặt trụ $\rho = \rho_1$
  - $\mathbf{a}_\varphi$: vector pháp tuyến mặt phẳng $\varphi = \varphi_1$
  - $\mathbf{a}_z$: tương tự trong trục tọa độ Descartes



(b)

- Tính chất:
  - $\mathbf{a}_\rho$, $\mathbf{a}_\varphi$ thay đổi theo φ → trong các phép đạo hàm, tích phân theo biến φ, các vector $\mathbf{a}_\rho$, $\mathbf{a}_\varphi$ là hàm của φ.
  - $\mathbf{a}_\rho$ x $\mathbf{a}_\varphi$ = $\mathbf{a}_z$

Công thức chuyển đổi:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = arctg\,\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

IV. Hệ tọa độ trụ tròn .

- Xét vi khối có kích thưởng vô cùng nhỏ có kích thước *dρ, ρdφ*, và *dz*

$$dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$$

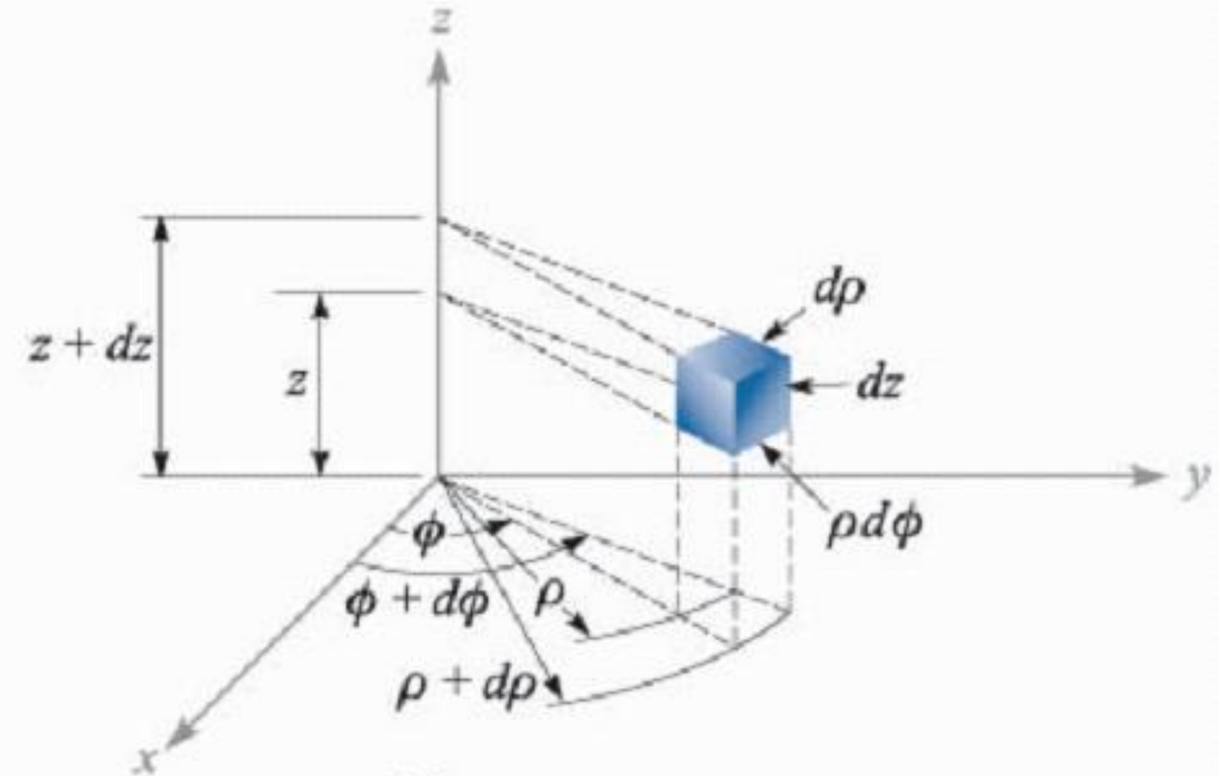
- Diện tích mặt trụ:

$$2\pi r.(h + r)$$

- Thể tích khối trụ:

$$\pi.r^2.h$$

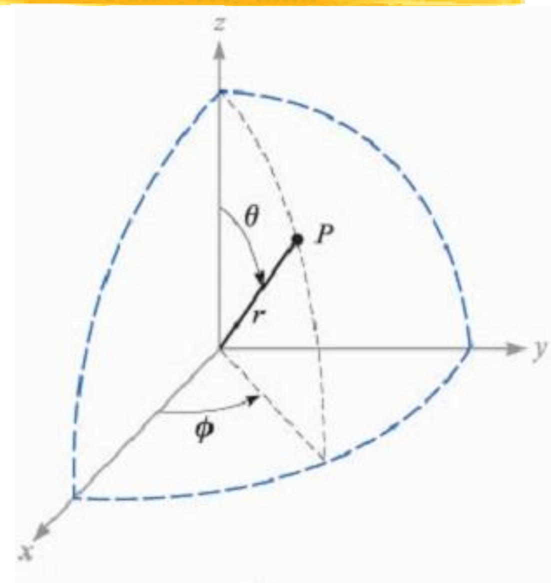
(*h* chiều cao của trụ)



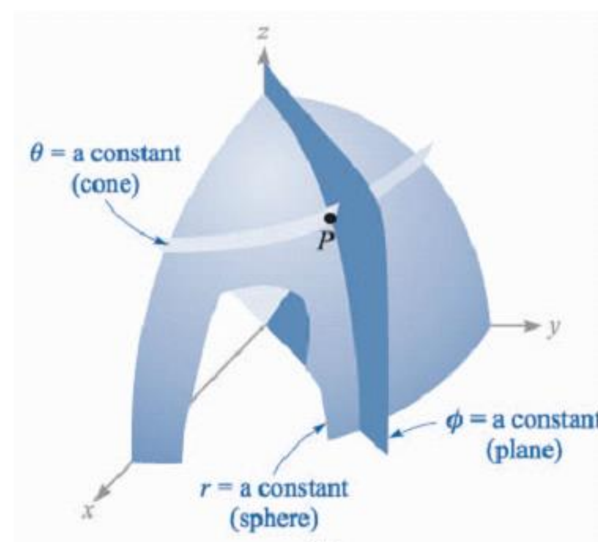
(c)

V. Hệ tọa độ cầu

- Hệ tọa độ cầu được xây dựng dựa trên hệ tọa độ Descartes: Điểm *P* xác định bởi
  - *r* khoảng cách từ *P* đến gốc tọa độ (tâm cầu).
  - *θ* góc hợp bởi chiều dương của trục *z* với đường thẳng nối gốc tọa độ với điểm P.
  - *φ* góc dương hợp bởi trục *x* với đường thẳng nối gốc tọa độ với hình chiếu của *P* lên mặt tọa độ cực.
- Điểm *P* là giao của *3* mặt.



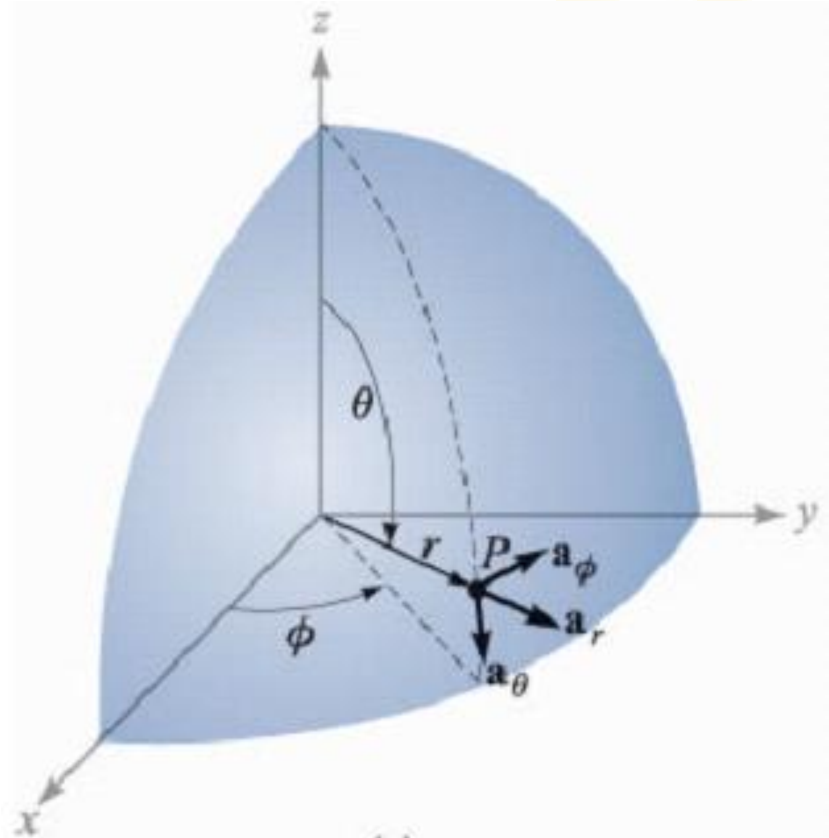
(a)



(b)

V. Hệ tọa độ cầu

- Vector đơn vị trong hệ tọa độ cầu:
  - $\mathbf{a}_r$: vector pháp tuyến của mặt cầu tại điểm *P*, có chiều hướng ra ngoài, nằm trên đáy của hình nón $\theta = const$, và mặt phẳng $\varphi = const$
  - $\mathbf{a}_\theta$: vector pháp tuyến của đáy mặt nón, nằm trong mặt phẳng, và tiếp tuyến với mặt cầu tại *P*.
  - $\mathbf{a}_\varphi$: giống trong hệ tọa độ trụ tròn.



(c)

Công thức chuyển đổi:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

V. Hệ tọa độ cầu

- Xét vi khối có kích thước vô cùng nhỏ:

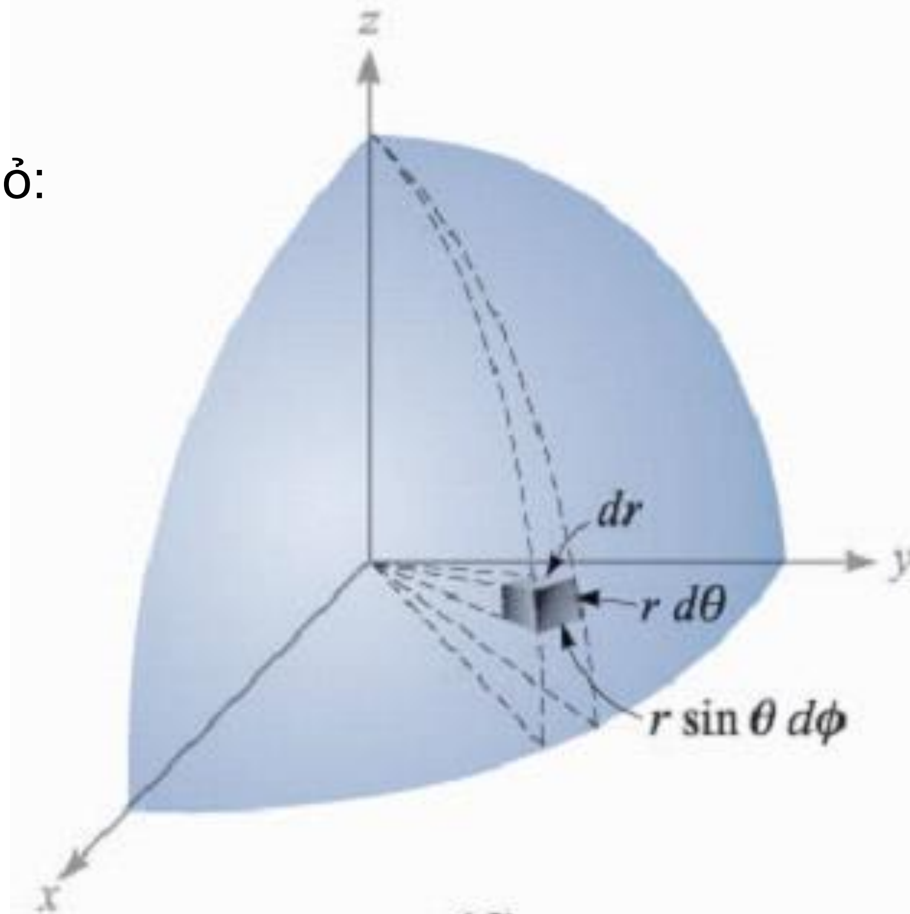
$$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

- Diện tích mặt cầu:

$$S_{cầu} = 4\pi . r^2$$

- Thể tích khối cầu:

$$V_{cầu} = 4/3 . \pi . r^3$$



(d)

VI. Một số công thức giải tích vector

Độ biến thiên vector (Grad - gradient)

$$Grad\ A = \frac{\delta A}{\delta x}\mathbf{a_x} + \frac{\delta A}{\delta y}\mathbf{a_y} + \frac{\delta A}{\delta z}\mathbf{a_z}$$

Độ tản của vector (div - divergence)

$$div\mathbf{A} = \nabla.\mathbf{A} = \frac{\delta A_x}{\delta x} + \frac{\delta A_y}{\delta y} + \frac{\delta A_z}{\delta z}$$

$$divgrad\mathbf{A} = \Delta\mathbf{A} = \frac{\delta^2\mathbf{A}}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\mathbf{A}}{\delta y^2} + \frac{\delta^2\mathbf{A}}{\delta z^2}$$

Độ xoáy của vector (Rot - rotationnel)

$$Rot\mathbf{A} = \nabla\times\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a_x} & \mathbf{a_y} & \mathbf{a_z} \\ \frac{\delta\mathbf{A}}{\delta x} & \frac{\delta\mathbf{A}}{\delta y} & \frac{\delta\mathbf{A}}{\delta z} \\ A_x & A_y & A_z \end{bmatrix}$$